

## PHƯƠNG PHÁP ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ CỦA HÀM SCHUMACHER

Nguyễn Văn Thềm

Trường Đại học Nông Lâm Tp. Hồ Chí Minh

### TÓM TẮT

Bài báo này giới thiệu sự khác biệt về kết quả phân tích và dự đoán quá trình sinh trưởng của cây cá thể bằng hàm Schumacher do ảnh hưởng của phương pháp ước lượng ba tham số và việc chọn lựa tiêu chuẩn dừng hay tiêu chuẩn đánh giá mức độ phù hợp của mô hình. Để làm rõ vấn đề đặt ra trên đây, tác giả đã làm phù hợp số liệu thể tích thân cây Thông ba lá (*Pinus keyisia* Royle ex Gordon) 60 tuổi với hàm Schumacher; trong đó các tham số của hàm này được ước lượng theo hai phương pháp khác nhau – đó là hồi quy tuyến tính và hồi quy phi tuyến tính. Đối với mỗi phương pháp, hàm của mô hình ước lượng phù hợp nhất được chọn từ 5 tiêu chuẩn sau đây: (1) hệ số xác định lớn nhất ( $R^2_{max}$ ); (2) sai số ước lượng nhỏ nhất ( $SE_{min}$ ); (3) sai số tuyệt đối trung bình nhỏ nhất ( $MAE_{min}$ ); (4) sai số tuyệt đối trung bình tính theo phần trăm nhỏ nhất ( $MAPE_{min}$ ); (5) tổng sai lệch bình phương nhỏ nhất ( $SSR_{min}$ ). Kết quả nghiên cứu đã chỉ ra rằng: (1) Nếu sử dụng phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất để ước lượng các tham số của hàm Schumacher, thì phương pháp cố định tham số m cho phép nhận được kết quả chính xác hơn so với phương pháp cố định tham số c. (2) Các tham số của hàm Schumacher được ước lượng theo phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến tính đạt được độ tin cậy cao hơn so với phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất. (3) Nếu chọn phương pháp ước lượng các tham số của hàm Schumacher và tiêu chuẩn dừng khác nhau, thì mô hình ước lượng phù hợp nhất cũng sẽ khác nhau.

**Từ khóa:** Hàm Schumacher, ước lượng tham số, Phương pháp dò tìm, tiêu chuẩn dừng, Phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất.

### ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong lâm học và điều tra rừng, người ta thường vận dụng những mô hình toán để mô tả và phân tích quy luật biến đổi của những nhân tố điều tra (đường kính, chiều cao, thể tích thân cây, trữ lượng rừng...) trên cây cá thể và lâm phần. Một trong những hàm số được vận dụng nhiều nhất là hàm Schumacher. Hàm Schumacher có dạng  $Y = m \cdot \exp(-b/A^c)$ ; trong đó m, b và c là ba tham số cần ước lượng. Ba tham số này có thể được ước lượng theo hai phương pháp khác nhau. Phương pháp thứ nhất là chuyển hàm Schumacher về dạng tuyến tính và sử dụng phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất để ước lượng ba tham số m, b và c. Khi sử dụng phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất, ba tham số m, b và c của hàm Schumacher có thể được ước lượng bằng cách cố định tham số c hoặc cố định tham số m; sau đó ước lượng hai tham số còn lại. Nói chung, giải pháp bình phương nhỏ nhất có ưu điểm là ước lượng phương sai không trệch và nhỏ nhất. Phương pháp thứ hai là xác định ba tham số m, b và c của hàm Schumacher bằng hồi quy phi tuyến tính (Nonlinear Regression). Theo đó, ba tham số của hàm Schumacher được ước lượng lặp lại nhiều lần cho đến khi đạt được tổng bình phương sai lệch không đổi.

Bài báo này giới thiệu những phương pháp ước lượng ba tham số của hàm Schumacher và phân tích ảnh hưởng của việc chọn lựa tiêu chuẩn đánh giá mức độ phù hợp của mô hình (hay tiêu chuẩn dừng) đến kết quả phân tích quá trình sinh trưởng thể tích thân cây Thông ba lá.

### ĐỐI TƯỢNG VÀ PHƯƠNG PHÁP

Để làm rõ vấn đề đặt ra trên đây, đã làm phù hợp số liệu thể tích thân cây Thông ba lá (*Pinus keyisia* Royle ex Gordon) 60 tuổi mọc tự nhiên tại khu vực Đơn Dương tỉnh Lâm Đồng (bảng 1) với hàm Schumacher.

Để ước lượng ba tham số của hàm Schumacher, đã sử dụng hai phương pháp khác nhau – đó là phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất và phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến tính. Đối với phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất, ba tham số của hàm Schumacher được xác định theo hai cách khác nhau:

(a) **Cố định trước tham số c và ước lượng tham số m và b**

Hàm Schumacher có dạng:

$$Y = m \cdot \exp(-b/A^c) \quad (1)$$

Khi cố định tham số c, thì hai tham số m và b được ước lượng bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Để đạt được điều đó, trước hết biến đổi hàm Schumacher về dạng tuyến tính như sau:

$$\ln(Y) = \ln(m) - b(1/A^c)$$

Tiếp theo, đặt  $\ln(Y) = Y_1$ ;  $b_0 = \ln(m)$ ;  $-b = b_1$ ;  $1/A^c = X$ .

$$\text{Do đó, } Y_1 = b_0 + b_1X$$

(2)

Sau đó phân tích hồi quy tương quan theo mô hình (2) để ước lượng hai tham số  $b_0$  và  $b_1$  bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Cuối cùng thay tham số c,  $m = \exp(b_0)$  và  $b = b_1$  vào phương trình (2) để trở lại hàm Schumacher.

**Bảng 1. Quá trình biến đổi thể tích thân cây thông ba lá 60 tuổi ở khu vực Đơn Dương tỉnh Lâm Đồng**

A (năm)	V(m <sup>3</sup> /cây)	ZV	ΔV	A (năm)	V(m <sup>3</sup> /cây)	ZV	ΔV
2	0,0002	0,0001	0,0001	32	1,2536	0,0676	0,0392
4	0,0049	0,0024	0,0012	34	1,3918	0,0691	0,0409
6	0,0209	0,0080	0,0035	36	1,5325	0,0704	0,0426
8	0,0514	0,0152	0,0064	38	1,6754	0,0715	0,0441
10	0,0969	0,0227	0,0097	40	1,8201	0,0724	0,0455
12	0,1566	0,0298	0,0130	42	1,9663	0,0731	0,0468
14	0,2291	0,0363	0,0164	44	2,1137	0,0737	0,0480
16	0,3131	0,0420	0,0196	46	2,2621	0,0742	0,0492
18	0,4071	0,0470	0,0226	48	2,4112	0,0745	0,0502
20	0,5098	0,0514	0,0255	50	2,5608	0,0748	0,0512
22	0,6201	0,0552	0,0282	52	2,7109	0,0750	0,0521
24	0,7370	0,0584	0,0307	54	2,8611	0,0751	0,0530
26	0,8595	0,0613	0,0331	56	3,0115	0,0752	0,0538
28	0,9869	0,0637	0,0352	58	3,1618	0,0752	0,0545
30	1,1185	0,0658	0,0373	60	3,3120	0,0751	0,0552

**(b) Cố định trước tham số m và ước lượng tham số b và c**

Khi cố định trước tham số m, thì hai tham số b và c của hàm Schumacher cũng được ước lượng bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Để đạt được điều đó, trước hết biến đổi hàm Schumacher như sau:

$$Y = m \cdot \exp(-b \cdot A^c)$$

(3)

Tiếp đến, biến đổi hàm (3) về dạng tuyến tính như sau:

$$\ln(-\ln(m/Y)) = \ln(b) - c \cdot \ln(A)$$

Đặt  $Y' = \ln(-\ln(Y/m))$ ;  $b_0 = \ln(b)$ ;  $c = b_1$ ;  $\ln(A) = X$

$$\text{Do đó, } Y' = b_0 + b_1X$$

(4)

Sau đó phân tích hồi quy tương quan theo mô hình (4) để ước lượng hai tham số  $b_0$  và  $b_1$  bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Cuối cùng thay tham số m,  $b = \exp(b_0)$  và  $c = b_1$  vào phương trình (1) để trở lại hàm Schumacher.

Đối với phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến tính, ba tham số m, b và c của hàm Schumacher được ước lượng bằng phương pháp Levenberg-Marquardt. Công cụ tính toán là phần mềm Statgraphics Plus Version 4.0.

Đối với mỗi phương pháp, những mô hình ước lượng phù hợp nhất được chọn từ 5 tiêu chuẩn sau đây: (1) hệ số xác định lớn nhất ( $R^2_{max}$ ); (2) sai số ước lượng nhỏ nhất ( $SE_{min}$ ); (3) sai số tuyệt đối trung bình nhỏ nhất ( $MAE_{min}$ ); (4) sai số tuyệt đối trung bình tính theo phần trăm nhỏ nhất ( $MAPE_{min}$ ); (5) tổng sai lệch bình phương nhỏ nhất ( $\sum(Y_{tn} - Y_{lt})^2_{min}$ ).

Vì ba tham số của hàm Schumacher có thể được ước lượng bằng những phương pháp khác nhau và mô hình phù hợp lại phụ thuộc vào tiêu chuẩn dùng, nên ở đây cần phải phân tích so sánh hai vấn đề sau đây:

(1) Nếu các tham số của hàm Schumacher được ước lượng theo những phương pháp và tiêu chuẩn dừng khác nhau, thì những mô hình phù hợp có dẫn đến báo cáo kết quả khác nhau hay không?

(2) Nếu các tham số của hàm Schumacher được ước lượng theo phương pháp bình phương nhỏ nhất và phương pháp hồi quy phi tuyến tính, thì phương pháp nào phản ánh gần đúng nhất so với số liệu thực nghiệm?

Để làm rõ hai câu hỏi trên đây, nhận thấy trước hết cần phải chọn lựa những mô hình phù hợp theo những tiêu chuẩn định trước. Kế đến, khảo sát mô hình và so sánh những đặc trưng của quá trình sinh trưởng thể tích thân cây thông ba lá được suy diễn từ mô hình lý thuyết với số liệu thực tế. Ở đây tính phù hợp của mô hình lý thuyết so với thực tế được đánh giá thông qua bốn đại lượng  $ZV_{max}$  và A đạt  $ZV_{max}$ ,  $\Delta V_{max}$  và A đạt  $\Delta V_{max}$ .

## KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

### Phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất

#### Đối với trường hợp cố định tham số c

Những tính toán từ số liệu của bảng 1 cho thấy, nếu cố định trước tham số c từ 0,2 đến 0,6, thì kết quả phân tích hồi quy tương quan giữa V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất sẽ nhận được những tham số và những sai lệch của mô hình rất khác nhau (bảng 2).

**Bảng 2. Phân tích hồi quy tương quan giữa V-A của cây thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với việc cố định tham số c từ 0,2-0,6**

c	m	b	R	R <sup>2</sup>	SE	SSR	MAE	MAPE
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0,2	46184,52	21,1134	-0,9955	99,11	0,2076	1,2066	0,1878	16,5
0,3	715,89	17,9988	-0,9991	99,83	0,0913	0,2335	0,0830	7,1
0,4	88,78	17,0398	-0,9999	99,99	0,0261	0,0191	0,0203	1,9
0,5	25,42	16,9852	-0,9979	99,58	0,1424	0,5675	0,1190	10,9
0,6	11,09	17,4099	-0,9932	98,63	0,2566	1,8439	0,2123	20,3

Từ số liệu của bảng 2 cho thấy, khi thay đổi tham số c từ 0,2 đến 0,6, thì tham số m giảm dần từ 46.184,52 đến 11,09. Tương tự, tham số b nhận những giá trị tăng dần từ 21,1134 đến 17,4099. Hệ số R<sup>2</sup> tăng dần từ 99,11% ứng với c bằng 0,20 và đạt cao nhất 99,99% ứng với c bằng 0,40; sau đó nó giảm dần đến 98,63% ứng với c bằng 0,6. Giá trị SSR giảm dần từ c bằng 0,20 (1,2066) và đạt giá trị nhỏ nhất ứng với c bằng 0,4 (0,0191); sau đó chúng tăng dần lên khi c lớn hơn 0,4. Giá trị SE, MAE và MAPE cũng biến đổi tương tự như SSR, nghĩa là giảm dần từ c bằng 0,20 và đạt giá trị nhỏ nhất ứng với c bằng 0,40; sau đó chúng lại tăng dần lên khi c lớn hơn 0,4.

Những phân tích trên đây cho thấy, đối với hàm Schumacher, nếu cho trước tham số c, thì việc chọn mô hình phù hợp phụ thuộc vào quan điểm chọn tiêu chuẩn dừng. Thật vậy, khi chọn tham số c cố định bằng 0,20, thì mô hình V-A có dạng:

$$V = 46.184,5 \cdot \exp(-21,1134/A^{0,2}) \quad (5)$$

$$R^2 = 99,11\%; SE = 0,2076; SSR = 1,2066; MAE = 0,1878; MAPE = 16,5\%.$$

Tương tự, khi chọn c bằng 0,30, thì mô hình V-A có dạng:

$$V = 715,89 \cdot \exp(-17,9988/A^{0,3}) \quad (6)$$

$$R^2 = 99,83\%; SE = 0,0913; SSR = 0,2335; MAE = 0,083; MAPE = 7,1\%.$$

Nếu chọn tham số c sao cho SE<sub>min</sub>, MAPE<sub>min</sub> và SSR<sub>min</sub>, thì mô hình V-A có dạng:

$$V = 88,78 \cdot \exp(-17,0398/A^{0,4}) \quad (7)$$

$$R^2 = 99,99\%; SE = 0,0261; SSR = 0,0191; MAE = 0,0203; MAPE = 1,9\%.$$

#### Đối với trường hợp cố định tham số m

Từ số liệu của bảng 1, nếu cố định tham số m nằm trong khoảng từ 4,0 đến 100,0, thì kết quả phân tích hồi quy tương quan giữa V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi cũng nhận được các tham số và những sai lệch của mô hình rất khác nhau (bảng 3). Phân tích số liệu bảng 3 cho thấy, khi thay đổi tham số m từ 4,0 đến 100,0, thì tham số b và c giảm dần tương ứng từ 44,6293 đến 17,1533 và 1,1308 đến 0,3941. Hệ số R<sup>2</sup> tăng dần từ 88,75% ứng với m bằng 4,0 và đạt 100% tương ứng với m bằng 90 trở lên. Tương tự, giá trị SE, MAE, SSR và MAPE giảm liên tục theo mức năng cao dần giá trị m từ 4,0 đến 100,0.

**Bảng 3. Phân tích hồi quy tương quan giữa V-A của cây thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với việc cố định tham số m từ 4 đến 100**

m	b	c	R	R <sup>2</sup>	SE	SSR	MAE	MAPE
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
4,0	44,6293	1,1308	-0,942	88,75	0,3484	3,3979	0,2706	38,9
6,0	27,5587	0,8607	-0,977	95,40	0,1636	0,7490	0,1979	27,1
22,0	18,4501	0,5429	-0,995	99,44	0,0353	0,0350	0,0841	10,9
24,0	18,2735	0,5309	-0,998	99,52	0,0321	0,0288	0,0787	10,2
28,0	18,0073	0,5111	-0,998	99,63	0,0269	0,0202	0,0695	9,0
32,0	17,8180	0,4953	-0,999	99,71	0,0229	0,0148	0,0618	8,0
40,0	17,5712	0,4711	-0,999	99,82	0,0173	0,0084	0,0498	6,4
50,0	17,3943	0,4494	-0,999	99,89	0,0126	0,0045	0,0385	5,0
90,0	17,1667	0,4016	-1,000	100,00	0,0036	0,0004	0,0118	1,6
100,0	17,1533	0,3941	-1,000	100,00	0,0023	0,0002	0,0075	1,1

Phân tích số liệu bảng 3 cũng nhận thấy, nếu chỉ dựa vào ba tiêu chuẩn SE<sub>min</sub>, SSR<sub>min</sub> và MAE<sub>min</sub> thì không dễ dàng chọn được một mô hình phù hợp nhất để mô tả quan hệ V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi như số liệu ở bảng 1. Trong trường hợp này, để chọn được một mô hình phù hợp, chúng ta cần phải dựa vào tiêu chuẩn R<sup>2</sup><sub>max</sub> hoặc MAPE<sub>min</sub> cho phép. Theo đó, nếu chọn tham số m sao cho giá trị R<sup>2</sup><sub>max</sub>, thì mô hình V-A có dạng:

$$V = 90,0 \cdot \exp(-17,1667/A^{0,40156}) \quad (8)$$

$$R^2 = 100,0\%; SE = 0,0036; SSR = 0,0004; MAPE = 1,60\%.$$

Nếu sử dụng MAPE là tiêu chuẩn dừng, thì mô hình phù hợp cần phải chọn theo tiêu chuẩn MAPE cho phép. Nói chung, nếu chọn mô hình với MAPE nhỏ hơn 10%, thậm chí nhỏ hơn 5%, thì chúng ta cũng có rất nhiều mô hình phù hợp. Trong trường hợp chọn tham số m sao cho MAPE bằng 5%, thì mô hình V-A phù hợp có dạng:

$$V = 50,0 \cdot \exp(-17,3943/A^{0,4494}) \quad (9)$$

$$R^2 = 99,89\%; SE = 0,0126; SSR = 0,0045; MAPE = 5,0\%$$

#### **Phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến tính**

Để ước lượng ba tham số của hàm Schumacher bằng phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến tính, trước hết cần giả định ba tham số m, b và c bằng những giá trị ban đầu nào đó. Sau đó sử dụng phương pháp Levenberg-Marquardt để ước lượng ba tham số m, b và c (dò tìm). Bảng 4 ghi lại kết quả ước lượng ba tham số của hàm Schumacher sau 4 lần giả định các tham số ban đầu (m, b và c) khác nhau.

**Bảng 4. Phân tích hồi quy tương quan giữa V-A của cây thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với việc sử dụng phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến**

TT	m	b	c	R <sup>2</sup>	SE	SSR	MAE	MAPE
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1.8035,40	17,6077	0,1754	99,923	0,0312	0,0263	0,0260	59,7
2	225,04	16,4328	0,3323	99,994	0,0084	0,0019	0,0070	7,54

3	107,85	17,2930	0,3914	100,0	0,0004	0,0000	0,0003	0,92
4	79,43	17,9394	0,4226	100,0	0,0044	0,0005	0,0036	4,11

Từ số liệu của bảng 4 cho thấy, nếu sử dụng tiêu chuẩn  $SSR_{\min}$  (hoặc  $R^2_{\max}$ ,  $SE_{\min}$ ,  $MAE_{\min}$  và  $MAPE_{\min}$ ) để chọn mô hình phù hợp, thì mô hình phù hợp nhất để mô tả quan hệ V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi có dạng:

$$V = 107,85 \cdot \exp(-17,2930/A^{-0,3914}) \quad (10)$$

$$R^2 = 100,0\%; SE = 0,0004; SSR = 0,0000; MAE = 0,0003; MAPE = 0,92\%.$$

Nếu biến đổi hàm Schumacher dưới dạng  $V = m \cdot \exp(-b \cdot A^c)$ , sau đó sử dụng phương pháp Levenberg-Marquardt để ước lượng ba tham số m, b và c, thì kết quả nhận được các tham số và những đặc trưng thống kê như ở bảng 5.

**Bảng 5. Phân tích hồi quy tương quan phi tuyến giữa V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher được biến đổi dưới dạng  $V = m \cdot \exp(-b \cdot A^c)$**

TT	m	b	c	$R^2$	SE	SSR	MAE	MAPE
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	78,4622	17,9703	0,4240	99,998	0,0046	0,0006	0,0038	4,2
2	81,4390	17,8777	0,4199	99,999	0,0040	0,0004	0,0033	3,8
3	98,4732	17,4397	0,3998	100,000	0,0015	0,0001	0,0012	1,8
4	107,848	17,2929	0,3914	100,000	0,0004	0,0000	0,0004	0,9
5	107,827	17,2933	0,3914	100,000	0,0004	0,0000	0,0004	0,9
6	120,324	17,1116	0,3813	100,000	0,0015	0,0000	0,0012	0,4

Từ số liệu của bảng 5 cho thấy, nếu sử dụng tiêu chuẩn  $SSR_{\min}$  không đổi để chọn mô hình phù hợp, thì mô hình phù hợp nhất để mô tả quan hệ V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi có dạng khác nhau:

$$V = 107,848 \cdot \exp(-17,2929/A^{-0,3914}) \quad (11)$$

$$R^2 = 100,0\%; SE = 0,0004; SSR = 0,0000; MAE = 0,0004; MAPE = 0,9\%.$$

$$V = 107,827 \cdot \exp(-17,2933/A^{-0,3914}) \quad (12)$$

$$R^2 = 100,0\%; SE = 0,0004; SSR = 0,0000; MAE = 0,0004; MAPE = 0,9\%.$$

$$V = 120,324 \cdot \exp(-17,1116/A^{-0,3813}) \quad (13)$$

$$R^2 = 100,0\%; SE = 0,0015; SSR = 0,0000; MAE = 0,0012; MAPE = 0,4\%.$$

#### **Khảo sát quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá**

Kết quả nghiên cứu ở mục 1 và 2 đã chứng tỏ rằng, tùy theo phương pháp ước lượng các tham số của hàm Schumacher và việc chọn lựa tiêu chuẩn dừng, chúng ta có thể nhận được nhiều mô hình phù hợp để mô tả quá trình sinh trưởng thể tích cây thông ba lá 60 tuổi. Một vấn đề đặt ra, nếu sử dụng những mô hình phù hợp này để phân tích và dự đoán quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi, thì kết quả có dẫn đến cùng kết luận hay không? Để làm rõ câu hỏi này, nhận thấy cần phải so sánh kết quả khảo sát những mô hình phù hợp với số liệu thực tế. Dưới đây khảo sát những mô hình phù hợp được xác định theo hai phương pháp – đó là phương pháp tuyến tính hóa và phương pháp phi tuyến tính.

#### **Đối với phương pháp tuyến tính**

Theo phương pháp tuyến tính, quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi có thể được mô tả bằng mô hình 7 và 8. Bảng 6, 7 và hình 1 dẫn kết quả phân tích quá trình sinh trưởng thể tích cây thông ba lá 60 tuổi bằng mô hình 7 và 8. Ở bảng 7 cũng dẫn ra những đặc trưng sinh trưởng thể tích cây thông ba lá được ước lượng theo hàm Schumacher với tham số c thay đổi từ 0,3 đến 0,6 và m bằng 50, 90 và 100.

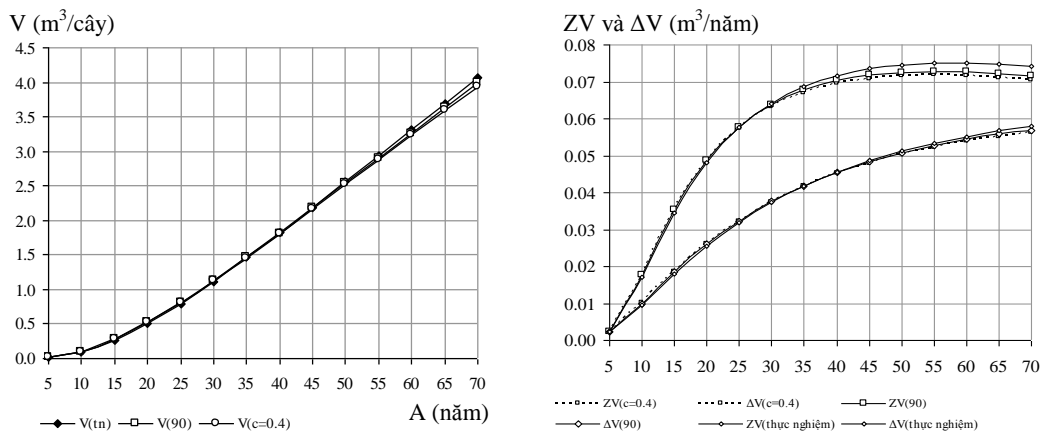
**Bảng 6. Quá trình sinh trưởng thể tích cây thông ba lá 60 tuổi được ước lượng bằng hàm Schumacher với việc cố định tham số  $c = 0,4$  và  $m = 90$**

A (năm)	Số liệu thực nghiệm			Phương pháp tuyến tính					
				Tham số $c = 0,4^{(*)}$			Tham số $m = 90^{(**)}$		
	$V_{(tn)}$	$ZV_{(tn)}$	$\Delta V_{(tn)}$	$V_{(0.4)}$	$ZV_{(0.4)}$	$\Delta V_{(0.4)}$	$V_{(90)}$	$ZV_{(90)}$	$\Delta V_{(90)}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
5	0,011	0,002	0,002	0,012	5,154	0,002	0,011	0,002	0,002
10	0,097	0,017	0,010	0,101	0,018	0,010	0,099	0,018	0,010
15	0,270	0,035	0,018	0,278	0,035	0,019	0,276	0,035	0,018
20	0,510	0,048	0,025	0,519	0,048	0,026	0,519	0,049	0,026
25	0,798	0,058	0,032	0,806	0,057	0,032	0,808	0,058	0,032
30	1,118	0,064	0,037	1,122	0,063	0,037	1,127	0,064	0,038
35	1,462	0,069	0,042	1,457	0,067	0,042	1,465	0,068	0,042
40	1,820	0,072	0,046	1,804	0,069	0,045	1,817	0,070	0,045
45	2,188	0,074	0,049	2,158	0,071	0,048	2,176	0,072	0,048
50	2,561	0,075	0,051	2,516	0,072	0,050	2,539	0,073	0,051
55	2,936	0,075	0,053	2,875	0,072	0,052	2,903	0,073	0,053
60	3,312	0,075	0,055	3,233	0,072	0,054	3,266	0,073	0,054
65	3,686	0,075	0,057	3,588	0,071	0,055	3,627	0,072	0,056
70	4,058	0,074	0,058	3,941	0,071	0,056	3,985	0,072	0,057

(\*) Mô hình 7; (\*\*) Mô hình 8

Từ số liệu bảng 6 và 7 cho thấy, nếu giải mô hình Schumacher bằng phương pháp tuyến tính với việc chọn tham số  $c$  bằng 0,30 đến 0,60, thì kết quả phân tích quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi nhận được những đặc trưng thống kê rất khác nhau. Thật vậy, khi chọn tham số  $c$  tăng dần từ 0,3 đến 0,6 thì đại lượng  $ZV_{max}$  giảm dần từ 0,1060 đến 0,0541 ( $m^3$ ), còn tuổi cây (A) đạt  $ZV_{max}$  giảm dần từ 115 đến 23 năm. Tương tự, đại lượng  $\Delta V_{max}$  giảm dần từ 0,0925 đến 0,0420 ( $m^3$ ), còn tuổi cây (A) đạt  $\Delta V_{max}$  giảm dần từ 276 đến 50 năm.

Khi khảo sát mô hình 7 có thể nhận thấy,  $ZV_{max} = 0,0718 m^3$  tại  $A = 52$  năm. Như vậy, so với đại lượng  $ZV_{max}$  thực tế ( $0,0752, m^3$ ) và tuổi cây đạt  $ZV_{max}$  thực tế (56 năm), mô hình 7 là mô hình phù hợp nhất để mô tả quan hệ V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi.



**Hình 1. Quá trình sinh trưởng (a) và tăng trưởng (b) thể tích thân cây Thông ba lá 60 tuổi ở khu vực Đơn Dương tỉnh Lâm Đồng**

- ✧ Thể tích thân cây được mô tả bằng hàm Schumacher; trong đó các tham số được xác định theo phương pháp tuyến tính với  $c = 0,4$  và  $m = 90$ .
- ✧ Đồ thị cũng mô tả quá trình biến đổi thể tích thân cây thực tế.

**Bảng 7. Khảo sát đặc trưng sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với việc cố định tham số c và m**

TT	m	b	c	ZV <sub>max</sub>	A	ΔV <sub>max</sub>	A	Điểm uốn tại:	
								A	V
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Khi cố định tham số c									
1	715,89	17,9988	0,3	0,1060	115	0,0925	276	115	9,4
2 <sup>(*)</sup>	88,78	17,0398	0,4	0,0718	52	0,0601	121	52	2,7
3	25,42	16,9852	0,5	0,0592	32	0,0477	72	32	1,3
4	11,09	17,4099	0,6	0,0541	23	0,0420	50	23	0,8
Khi cố định tham số m									
1	50	17,3943	0,4494	0,0678	43	0,0556	97	43	2,0
2 <sup>(**)</sup>	90	17,1667	0,4016	0,0728	53	0,0609	122	53	2,8
3	100	17,1533	0,3941	0,0739	55	0,0620	128	55	2,9
Thực tế	-	-	-	0,0752	56	-	-	-	-

(\*) Mô hình 7; (\*\*) Mô hình 8

Từ số liệu bảng 6 và 7 cũng cho thấy, nếu giải mô hình Schumacher bằng phương pháp tuyến tính với việc cố định tham số m, thì kết quả phân tích quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi cũng nhận được những đặc trưng thống kê rất khác nhau. Tuy vậy, nếu sử dụng tiêu chuẩn R<sup>2</sup><sub>max</sub> để đánh giá sự phù hợp của mô hình, thì mô hình 8 là mô hình phù hợp. Theo đó, khi khảo sát mô hình 8, có thể xác định được đại lượng ZV<sub>max</sub> (0,0728, m<sup>3</sup>) và tuổi cây đạt ZV<sub>max</sub> (53 năm) gần đúng so với thực tế.

Phân tích số liệu ở bảng 3 và 7 cũng nhận thấy rằng, khi chọn tham số m lớn hơn 90 thì hệ số R<sup>2</sup> đạt cao nhất không đổi, còn SSR và MAPE sẽ tiến dần đến zero. Ngoài ra, hai đại lượng ZV<sub>max</sub> và tuổi cây đạt ZV<sub>max</sub> cũng xích dần đến giá trị thực tế. Điều đó chứng tỏ rằng, ba tham số (m, b và c) của hàm Schumacher được ước lượng bằng phương pháp hồi quy tuyến tính sẽ nhận được kết quả chính xác hơn bằng cách cố định tham số m.

### **Đối với phương pháp phi tuyến**

Như đã thấy ở mục 2, hàm Schumacher có thể được viết dưới hai dạng. Dạng thứ nhất V = m\*exp(-b/A<sup>c</sup>), còn dạng thứ hai V = m\*exp(-b\*A<sup>c</sup>). Tương ứng với hai cách viết này, chúng ta có hai cách xác định các hệ số của hàm Schumacher bằng phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến. Mặc dù vậy, nếu chọn trước tiêu chuẩn dừng, thì sau nhiều bước dò tìm chúng ta có thể xác định được hai mô hình 10 và 11 để biểu diễn quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi. Từ hai mô hình 10 và 11, có thể nhận thấy chúng đều có các tham số và những đặc trưng thống kê giống nhau. Điều đó chứng tỏ cả hai mô hình này đều có thể sử dụng để mô tả quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi. Ở bảng 8, 9 và hình 2 ghi lại số liệu thực nghiệm và kết quả khảo sát quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi bằng mô hình 10 và 11. Từ đó cho thấy, đại lượng ZV<sub>max</sub> (0,0753, m<sup>3</sup>) và tuổi cây đạt ZV<sub>max</sub> (57 năm) rất phù hợp với số liệu thực tế.

**Bảng 8. Quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi được ước lượng bằng hàm Schumacher với các tham số được xác định theo hồi quy phi tuyến**

A (năm)	Số liệu thực nghiệm			Mô hình 10			Mô hình 11		
	V <sub>(tn)</sub>	ZV <sub>(tn)</sub>	ΔV <sub>(tn)</sub>	V <sub>(10)</sub>	ZV <sub>(10)</sub>	ΔV <sub>(10)</sub>	V <sub>(11)</sub>	ZV <sub>(11)</sub>	ΔV <sub>(11)</sub>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
5	0,011	0,002	0,002	0,011	0,002	0,002	0,011	0,002	0,002
10	0,097	0,017	0,010	0,096	0,017	0,010	0,096	0,017	0,010
15	0,270	0,035	0,018	0,269	0,035	0,018	0,269	0,035	0,018

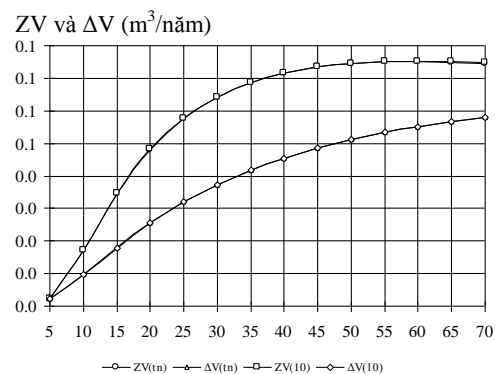
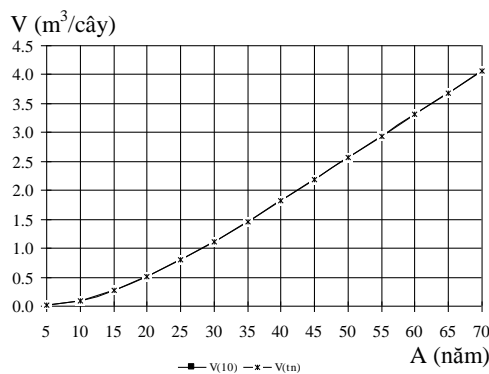
20	0,510	0,048	0,025	0,510	0,048	0,026	0,510	0,048	0,026
25	0,798	0,058	0,032	0,798	0,058	0,032	0,798	0,058	0,032
30	1,118	0,064	0,037	1,119	0,064	0,037	1,119	0,064	0,037
35	1,462	0,069	0,042	1,462	0,069	0,042	1,462	0,069	0,042
40	1,820	0,072	0,046	1,820	0,072	0,045	1,820	0,072	0,045
45	2,188	0,074	0,049	2,187	0,073	0,049	2,187	0,073	0,049
50	2,561	0,075	0,051	2,560	0,075	0,051	2,560	0,075	0,051
55	2,936	0,075	0,053	2,936	0,075	0,053	2,936	0,075	0,053
60	3,312	0,075	0,055	3,313	0,075	0,055	3,313	0,075	0,055
65	3,686	0,075	0,057	3,688	0,075	0,057	3,688	0,075	0,057
70	4,058	0,074	0,058	4,062	0,075	0,058	4,062	0,075	0,058

### So sánh hai phương pháp tuyến tính hóa và phi tuyến tính

Theo phương pháp tuyến tính hóa, đã xác định được hai mô hình phù hợp (7 và 8) để mô tả quá trình sinh trưởng thể tích thân cây Thông ba lá 60 tuổi. Tương tự, theo phương pháp phi tuyến tính, mô hình 10 là mô hình phù hợp để mô tả quá trình sinh trưởng thể tích thân cây Thông ba lá 60 tuổi. Ở bảng 10, 11, 12 và hình 2 dẫn kết quả so sánh thể tích thân cây Thông ba lá 60 tuổi được ước lượng theo ba mô hình 7, 8 và 10 với số liệu thực tế. Từ đó có thể nhận thấy, nếu xác định các tham số của hàm Schumacher bằng cách tuyến tính hóa, sau đó chọn mô hình phù hợp, thì kết quả nhận được tuổi cây đạt  $ZV_{max}$  và  $\Delta V_{max}$  nhỏ hơn so với thực tế tương ứng một cấp tuổi và hai cấp tuổi. Ngược lại, nếu ước lượng các tham số của hàm Schumacher bằng hồi quy tương quan phi tuyến tính, sau đó chọn mô hình phù hợp, thì kết quả nhận được  $ZV_{max}$ ,  $\Delta V_{max}$  và tuổi cây đạt  $ZV_{max}$  và  $\Delta V_{max}$  gần đúng nhất so với số liệu thực tế. Kết quả so sánh này chứng tỏ rằng, ba tham số (m, b và c) của hàm Schumacher được ước lượng bằng phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến sẽ nhận được kết quả chính xác hơn so với phương pháp hồi quy tuyến tính.

**Bảng 9. Khảo sát đặc trưng sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với các tham số được xác định theo hồi quy phi tuyến**

Mô hình	m	b	c	$ZV_{max}$	A	$\Delta V_{max}$	A	Điểm uốn tại:	
								A	V
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
10	107,850	17,2930	0,3914	0,0753	57	0,0633	132	57	3,1
11	107,848	17,2929	0,3914	0,0753	57	0,0633	132	57	3,1
Thực tế	-	-	-	0,0752	56	-	-	-	-



**Hình 2. Quá trình sinh trưởng (a) và tăng trưởng (b) thể tích thân cây thông ba lá 60 tuổi được mô tả bằng hàm Schumacher.**

- ✧ Các tham số của hàm Schumacher được xác định theo phương pháp phi tuyến tính.
- ✧ Đồ thị cũng mô tả quá trình biến đổi thể tích thân cây thực tế.



**Bảng 10. Những đặc trưng thống kê của ba mô hình mô tả quan hệ V-A của cây Thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với ba cách xác định các tham số khác nhau**

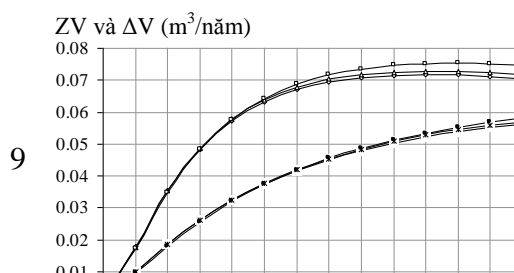
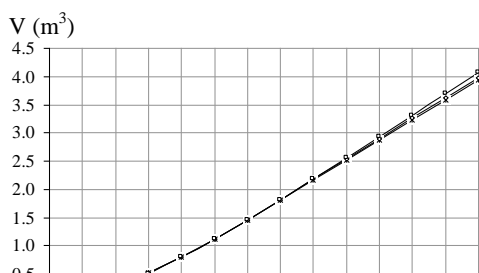
Mô hình	m	b	c	R <sup>2</sup>	SE	SSR	MAE	MAPE
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
7	88,78	17,0398	0,4000	99,99	0,0261	0,0191	0,0203	1,9
8	90,00	17,1667	0,4016	100,00	0,0036	0,0004	0,0118	1,6
10	107,85	17,2930	0,3914	100,00	0,0004	0,0000	0,0003	0,9

**Bảng 11. So sánh ba mô hình mô tả quá trình sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với ba cách xác định các tham số khác nhau**

A (năm)	Mô hình 7			Mô hình 8			Mô hình 10		
	V <sub>(7)</sub>	ZV <sub>(7)</sub>	ΔV <sub>(7)</sub>	V <sub>(8)</sub>	ZV <sub>(8)</sub>	ΔV <sub>(8)</sub>	V <sub>(10)</sub>	ZV <sub>(10)</sub>	ΔV <sub>(10)</sub>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
5	0,012	0,002	0,002	0,011	0,002	0,002	0,011	0,002	0,002
10	0,101	0,018	0,010	0,099	0,018	0,010	0,096	0,017	0,010
15	0,278	0,035	0,019	0,276	0,035	0,018	0,269	0,035	0,018
20	0,519	0,048	0,026	0,519	0,049	0,026	0,510	0,048	0,026
25	0,806	0,057	0,032	0,808	0,058	0,032	0,798	0,058	0,032
30	1,122	0,063	0,037	1,127	0,064	0,038	1,119	0,064	0,037
35	1,457	0,067	0,042	1,465	0,068	0,042	1,462	0,069	0,042
40	1,804	0,069	0,045	1,817	0,070	0,045	1,820	0,072	0,045
45	2,158	0,071	0,048	2,176	0,072	0,048	2,187	0,073	0,049
50	2,516	0,072	0,050	2,539	0,073	0,051	2,560	0,075	0,051
55	2,875	0,072	0,052	2,903	0,073	0,053	2,936	0,075	0,053
60	3,233	0,072	0,054	3,266	0,073	0,054	3,313	0,075	0,055
65	3,588	0,071	0,055	3,627	0,072	0,056	3,688	0,075	0,057
70	3,941	0,071	0,056	3,985	0,072	0,057	4,062	0,075	0,058

**Bảng 12. Khảo sát đặc trưng sinh trưởng thể tích cây Thông ba lá 60 tuổi bằng hàm Schumacher với ba cách xác định các tham số khác nhau**

Mô hình	m	b	c	ZV <sub>max</sub>	A	ΔV <sub>max</sub>	A	Điểm uốn tại:	
								A	V
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
7	88,78	17,0398	0,4000	0,0718	52	0,0601	121	52	2,7
8	90,00	17,1667	0,4016	0,0728	53	0,0609	122	53	2,8
10	107,85	17,2930	0,3914	0,0753	57	0,0633	132	57	3,1
Thực tế		-	-	0,0752	56	-	-	-	-



## KẾT LUẬN

Từ kết quả phân tích những phương pháp xác định ba tham số của hàm Schumacher, đi đến những kết luận sơ bộ sau đây:

(1) Nếu sử dụng phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất để ước lượng các tham số của hàm Schumacher, thì phương pháp cố định tham số  $m$  cho phép nhận được kết quả chính xác hơn so với phương pháp cố định tham số  $c$ .

(2) Mặc dù các tham số của hàm Schumacher đều có thể được ước lượng theo hai phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất và phương pháp hồi quy phi tuyến tính, nhưng phương pháp hồi quy tương quan phi tuyến tính đạt được độ tin cậy cao hơn.

(3) Nếu chọn phương pháp ước lượng các tham số của hàm Schumacher và tiêu chuẩn dừng khác nhau, thì mô hình ước lượng phù hợp nhất cũng sẽ khác nhau. Vì thế, khi mô tả và dự đoán quá trình sinh trưởng của cây cá thể và lâm phần bằng hàm Schumacher, thì nhà nghiên cứu cần phải chỉ rõ phương pháp ước lượng các tham số và tiêu chuẩn dừng.

(4) Dù sử dụng phương pháp bình phương sai lệch nhỏ nhất hay phương pháp hồi quy phi tuyến tính, thì quá trình tính toán cũng phải thực hiện qua nhiều bước để dò tìm các tham số của hàm Schumacher sao cho thỏa mãn tốt nhất tiêu chuẩn dừng.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Vũ Tiến Hình và các tác giả khác, 1992. Điều tra rừng, Trường Đại học lâm nghiệp, Hà Nội.
2. Vũ Tiến Hình, 2003. Sản lượng rừng, Nxb Nông nghiệp, Hà Nội.
3. Võ Văn Huy và cộng sự, 1997. Ứng dụng SPSS For Windows để xử lý và phân tích dữ kiện nghiên cứu marketing, quản trị, kinh tế, y học, tâm lý, xã hội, Nxb. Khoa học và kỹ thuật.
4. Trần Bá Nhẫn, Đinh Thái Hoàng, 1998. Lý thuyết thống kê ứng dụng trong quản trị, kinh doanh và nghiên cứu kinh tế, Nxb. Thống kê.
5. Nguyễn Ngọc Kiêng, 1996. Thống kê học trong nghiên cứu khoa học, Nxb Giáo dục.
6. Nguyễn Ngọc Lung, 1999. Nghiên cứu tăng trưởng và sản lượng rừng trồng áp dụng cho rừng Thông ba lá ở Việt Nam. Nxb Nông nghiệp, Hà Nội.
7. Phan Văn Tân, 2003. Các phương pháp thống kê trong khí hậu. Nxb Đại học quốc gia Hà Nội.
8. Nguyễn Văn Thêm, 2004. Hướng dẫn sử dụng Statgraphics 3.0 & 5.1 để xử lý thông tin trong lâm học. Nxb. Nông nghiệp Chi nhánh Tp. Hồ Chí Minh.
9. David R. Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams, 2002. Statistics for business and economics, 8<sup>th</sup> ed., BookMasters, Inc.